



XXIII SEMINARIO NACIONAL DE HIDRÁULICA E HIDROLOGÍA

IBAGUÉ, 15 AL 17 DE AGOSTO DE 2018

IMPLEMENTACIÓN DEL FILTRO KALMAN (KF) PARA EL PRONÓSTICO DE CAUDALES HORARIOS EN UN TRAMO DEL RÍO MAGDALENA – COLOMBIA

1er. Cristian Augusto Villanueva Núñez, 2do. Guillermo Hernández Torres y 3er. Nelson Obregón Neira

(1) Ingeniero Civil – colombiano. Docente Univ. Católica de Colombia, Bogotá y candidato para optar título de maestría (cavillanuevan@ucatolica.edu.co). (2) Ingeniero Agrícola – colombiano. Docente universidad católica de Colombia, Bogotá (ghernandez@ucatolica.edu.co). (3) Ingeniero Civil, Msc y Ph D – colombiano. Profesor titular e investigador Pontificia Universidad Javeriana, Bogotá (nobregon@javeriana.edu.co).

RESUMEN

El trabajo presenta una implementación del Filtro Kalman, para el pronóstico horario de caudales en tiempo real sobre un tramo del río Magdalena, iniciando en la estación limnigráfica de Puerto Berrío en el departamento de Antioquia hasta la estación limnigráfica de Barrancabermeja en el departamento de Santander. Se plantearon tres modelos de tránsito agregados como son: el tránsito por diferencias finitas, por piscina nivelada y el modelo de Muskingum lineal. La posterior calibración y validación de los modelos de tránsitos permitió la implementación del pronóstico en el filtro Kalman en cada uno. El modelo de tránsito de Muskingum presenta la mejor tendencia de ajuste según la función objetivo de Nash-Sutcliffe, para el proceso de calibración y validación en cuatro periodos seleccionados. El modelo de tránsito de piscina nivelada es el que tiene la segunda mejor tendencia y el modelo en menor grado de calibración y validación según la función objetivo es el de tránsito de diferencias finitas.

Los resultados de la función objetivo de Nash-Sutcliffe (0,946-0,995) son altos para el pronóstico horario de caudales por el filtro Kalman, en cuatro periodos seleccionados y los tres modelos de tránsito desarrollados con o sin ruido en la ecuación de medición del filtro. El modelo de tránsito por diferencias finitas presenta la tendencia de mejores y más altos valores cercanos a uno, en la función objetivo de Nash-Sutcliffe, el modelo de tránsito de piscina nivelada es la segunda mejor tendencia y el tránsito de Muskingum presenta la tendencia de los valores menores de este coeficiente.

ABSTRACT

The work presents an implementation of the Kalman filter, for the real time forecast of flows over a stretch of the Magdalena River, starting at the limnigraphic station of Puerto Berrío in the department of Antioquia to the limnigraphic station of Barrancabermeja in the department of Santander. Three aggregate traffic models were proposed, such as: transit through finite differences, by level pool and the linear Muskingum model. The subsequent calibration and validation of the transit models allowed the

Mayor Información

implementation of the forecast in the Kalman filter. The Muskingum transit model presents the best adjustment tendency according to the Nash-Sutcliffe objective function, for the calibration and validation process in the five selected periods. The model of traffic of level pool is the one that has the second best tendency and the model to a lesser degree of calibration and validation according to the objective function is the transit of finite differences.

The results of the Nash-Sutcliffe objective function (0.946-0.995) are high for the hourly flow forecast by the Kalman filter, in the five periods and the three transit models developed with or without noise in the filter measurement equation. The finite difference transit model presents the trend of better and higher values close to one, in the Nash-Sutcliffe objective function, the level pool transit model is the second best trend and Muskingum traffic presents the trend of the lower values of this coefficient.

PALABRAS CLAVE: Nash-Sutcliffe, Filtro Kalman y pronóstico.

1. INTRODUCCIÓN

La importancia de pronosticar caudales en afluentes es útil, porque con esta herramienta, puede disminuir o evitar la pérdida de vidas humanas. Una forma de pronosticar caudales es por medio de la implementación matemática del filtro Kalman, el cual es el objetivo principal que se desarrolló para este proyecto de investigación.

Se presentan tres modelos de tránsito, haciendo la adecuación necesaria para plantear una formulación matemática, considerando el aporte de caudales por afluentes tributarios. Los tres modelos de tránsito lineales de caudales empleados son de Piscina Nivelada, por Muskingum y el tránsito autodenominado como Diferencias Finitas. El análisis de las magnitudes de caudales en un cauce del río, puede ser representado físicamente por la formulación matemática de tránsitos lineales de caudales.

Con base en las ecuaciones matriciales de cada uno de los tres tránsitos de caudales lineales utilizados, generaron las estructuras matemáticas para las ecuaciones de estado, para el filtro Kalman (KF), en la estimación o pronóstico de las variables de estado de caudales, en un sistema lineal estocástico.

El filtro Kalman permite la estimación óptima o predicción de variables que no son directamente observables (Georgakakos K. y Bras R, 1985), los registros generalmente están influenciados por ruido en la ecuación de medición. Se realizó el análisis de las magnitudes de los caudales horariamente y su posterior pronóstico horario por medio del filtro (KF), apoyados con las ecuaciones de estado, en cada uno de los tres modelos lineales de tránsito.

El tramo de estudio, está ubicado entre las estaciones limnigráfica de Puerto Berrío y Barrancabermeja, sobre el río Magdalena. El proceso de calibración y de validación de los tres modelos de tránsito desarrollados, se realizó según la función objetivo de Nash-Sutcliffe por medio del programa MCAT-V.2 empleando la metodología de Montecarlo. Se empleo para las simulaciones cuatro periodos de tiempo, seleccionados con base en la información disponible, por el Instituto de Hidrología, Meteorología y Estudios Ambientales (IDEAM).

En la aplicación conceptual del filtro Kalman, para el pronóstico de caudales horarios realizados, se explica la necesidad de un modelo Auto-regresivo de orden uno, para el pronóstico de los caudales de

Mayor Información

entrada de los afluentes tributarios. Se muestran los resultados del pronóstico de caudales horarios por medio de gráficas y de tablas resúmenes, con sus respectivos análisis, para los escenarios de simulación planteados con ruidos y sin ruidos en la ecuación de medición.

2. MARCO CONCEPTUAL

La generación de caudales en los ríos es producida por procesos físicos, de difícil cuantificación. La razón principal es por las variables hidrológicas y características fisiográficas, de intrincada complejidad y aleatoriedad.

En el presente proyecto se desarrollaron tres modelos lineales de tránsitos hidrológicos o modelos de tránsitos de sistemas agregados, los cuales están basados en el principio de la conservación de la masa (Chow et al, 1994). Se consideró en los modelos lineales de tránsitos, cuantificar los caudales de los afluentes tributarios, por las áreas de drenaje respectivas, al cauce principal del río Magdalena, en la zona de estudio.

Cada uno de los embalses proyectados son independientes o separados a partir de la ubicación de los tributarios más importantes, representándose las áreas de sus cuencas hidrográficas y también las áreas aledañas que drenen hacia el cauce principal. (Ver **Figura 1**).

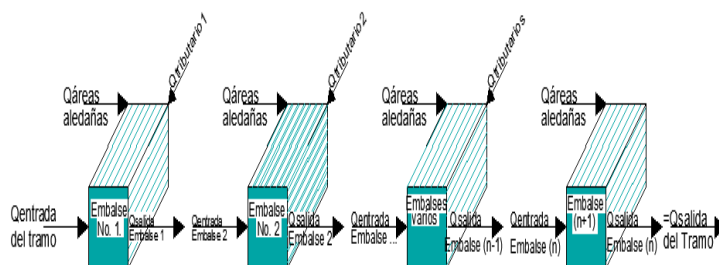


Figura 1.- Esquema para dividir el cauce de un río por embalses.

El tránsito de caudales es un procedimiento para determinar el tiempo y magnitud del caudal en un punto a lo largo de un curso de agua utilizando un hidrograma conocido en un punto aguas arriba (Chow, et al, 1994). Los modelos de tránsito parten del principio fundamental de conservación de la masa [1] para un sistema hidrológico:

$$\frac{dS}{dt} = I(t) - Q(t) \quad [1]$$

Donde el hidrograma de entrada $I(t)$ y el hidrograma de salida $Q(t)$ se relacionan a través de una función de volumen de almacenamiento (S) determinada dS/dt . Para poder linealizar el volumen de agua por medio de los caudales en el sistema hidrológico, se plantea la siguiente ecuación de hipótesis:

$$S = KQ \quad [2]$$

El parámetro (K) tiene unidades de tiempo, generalmente se relaciona como el tiempo de viaje o de tránsito a lo largo del tramo en el cauce, también se considera que es un coeficiente para el almacenamiento (Ponce, 1989). Para este proyecto el objetivo principal, es pronosticar los valores de los caudales con el filtro Kalman y no analizar el comportamiento propiamente de la onda de la creciente, a través de cada tramo. Al remplazar la ecuación [1] y [2] se obtiene la siguiente expresión;

$$\frac{dQ_i}{dt} = \frac{1}{K_i} (I_i(t) - Q_i(t)) \quad [3]$$

La ecuación [3] representa el cambio del caudal en el tiempo, la cual es la base del modelo de tránsito denominado como “Diferencias Finitas”, siendo uno de los resultados indirectos del presente proyecto de investigación y que tiene similitud con el reconocido tránsito de piscina nivelada.

Una de las suposiciones para la aplicación del tránsito hidrológico de Muskingum, es considerar dos tipos de almacenamiento, un almacenamiento por el volumen del prisma y adicionalmente un almacenamiento por cuña. Este almacenamiento producido, debe ser proporcional a la diferencia del caudal de entrada (I) y al caudal de salida (Q) (Chow et al, 1994). Se cuantifica el volumen de agua almacenada (S) en cada embalse, con la siguiente ecuación:

$$S = K * Q + K * X(I - Q) \quad [4]$$

Donde X es un factor adimensional de ponderación que está en el rango $[0 \leq X \leq 0.5]$ en el tránsito de Muskingum y es cero (0) para el modelo de piscina nivelada. El coeficiente “ X ” depende de la forma de la cuña de almacenamiento a modelar (Chow et al, 1994). Obsérvese que si no se considera el volumen de cuña de almacenamiento ($X=0$) la ecuación de almacenamiento [4], se transforma en la ecuación [2].

La variación de los caudales de entrada (I) y los caudales de salida (Q) en un intervalo de tiempo (Δt) de un sub-tramo, representa el cambio de almacenamiento (ds) de forma lineal en el intervalo de tiempo j -ésimo ($S_{j+1} - S_j$), para el hidrograma de entrada y de salida, por medio de la ecuación [5].

$$S_{(j+1)} - S_{(j)} = \frac{I_{(j)} + I_{(j+1)}}{2} \Delta t - \frac{Q_{(j)} + Q_{(j+1)}}{2} \Delta t \quad [5]$$

Con base en la ecuación [4] y [5] se pueden desarrollar las ecuaciones matriciales para el tránsito lineal de Muskingum y de piscina nivelada. El tránsito de Piscina Nivelada considera un tránsito desde un embalse con una superficie de agua horizontal asumiendo una función de almacenamiento [2] lineal.

Modelo lineal de tránsito de diferencias finitas

Basados en la ecuación [3] y por su discretización, se logró plantear el modelo denominado en este documento como tránsito por diferencias finitas. La ecuación [6] está planteada de forma matricial hasta los primeros cuatro embalses, con afluentes tributarios, en el modelo de tránsito de diferencias finitas generando la ecuación de estado, para implementar el filtro Kalman.

$$[X_{t+1}]_{4 \times 1} = \begin{bmatrix} QSE1_{(t+1)} \\ QSE2_{(t+1)} \\ QSE3_{(t+1)} \\ QSE4_{(t+1)} \end{bmatrix}_{4 \times 1} = A_{4 \times 4} * [X_t]_{4 \times 1} + B_{4 \times 4} * [U_{t+1}]_{4 \times 1} \quad [6]$$

Donde (X_{t+1} y X_t) representa los caudales de salida (QSE), de cada uno de los embalses por un vector columna, para el instante de tiempo (t+1) y (t) en el modelo del tránsito denominado de diferencias finitas. La matriz (A) es de constantes y cuadrada, las constantes son (a_i) y (b_i), ver ecuación [6].

El vector columna (U_{t+1}) es la entrada impuesta al tránsito por diferencias finitas, representa el caudal de entrada medido en la estación limnigráfica aguas arriba más los caudales cuantificados por las áreas aledañas al cauce principal de la zona de estudio en cada embalse (fila 1 primer embalse, ver **Figura 1**) adicionalmente los caudales de los afluentes tributarios principales y secundarios. Es un vector con igual número de filas como igual número de embalses se plantee, para el instante de tiempo (t+1), ver ecuación [6].

La matriz (B) es cuadrada conformada por constantes. Las constantes son (b_i) en la matriz, ver ecuación [6].

Modelo lineal de tránsito de Muskingum

Por medio de la ecuación [4] y [5], se desarrolló el modelo conocido como tránsito de Muskingum. Para los cuatro embalses iniciales, la ecuación matricial [7], para el tránsito de Muskingum con afluentes tributarios es:

$$[X_{musk(j+1)}]_{(4x1)} = \begin{bmatrix} QSE1_{(j+1)} \\ QSE2_{(j+1)} \\ QSE3_{(j+1)} \\ QSE4_{(j+1)} \end{bmatrix}_{(4x1)} = [C1]_{(4x4)} [X_{musk(j)}]_{(4x1)} + [7]$$

$$+ [C2]_{(4x4)} [UK_{(j+1)}]_{(4x1)} + [C3]_{(4x4)} [UK_{(j)}]_{(4x1)}$$

El vector columna ($X_{musk j}$) representa el caudal de salida de cada embalse “ $QSE_{(j)}$ ” consecutivo por fila en el instante de tiempo (j) en el modelo de Muskingum, ver ecuación [7].

El vector columna (UK_{j+1}) y (UK_j) es la entrada impuesta al tránsito de Muskingum para los instantes de tiempo (j) y (j+1), representa el caudal de entrada medido en la estación limnigráfica aguas arriba más los caudales cuantificados por las áreas aledañas al cauce principal de la zona de estudio en cada embalse (fila 1 primer embalse, ver **Figura 1**) adicionalmente los caudales de los afluentes tributarios principales y secundarios. Es un vector con igual número de filas como igual número de embalses se plantee, ver ecuación [7].

Las matrices (C_1^1, C_2^1, C_3^1) son matrices cuadradas donde están la productoria de los coeficientes dimensionales que multiplican respectivamente el caudal de salida de cada embalse ($X_{musk j}$) en el instante (j) “ $C1$ ”, los caudales aportantes de los afluentes tributarios y áreas aledañas a la zona de estudio respectivamente en el instante (j+1) “ $C2$ ” y en el instante de tiempo (j) “ $C3$ ” por tramo. El número en el superíndice indica el número del embalse al cual está operando, ver ecuación [7].

Modelo lineal de tránsito de Piscina Nivelada

Por medio de la ecuación [4] y [5], se desarrolló el modelo conocido como tránsito de piscina nivelada considerando que no hay volumen de almacenamiento de agua por cuña ($X=0$). De forma matricial, en resumen, se expresa el modelo de tránsito de piscina nivelada con afluentes tributarios de forma genérica ecuación [8] y a manera de ejemplo matricialmente para cuatro embales según ecuación [9]:

$$[XPiscniv_{(j+1)}]_{(nx1)} = [A1]_{(nxn)} [XPiscniv_{(j)}]_{(nx1)} + [B2]_{(nxn)} [UK]_{(nx1)} \quad [8]$$

$$\begin{bmatrix} QSE1_{(j+1)} \\ QSE2_{(j+1)} \\ QSE3_{(j+1)} \\ QSE4_{(j+1)} \end{bmatrix}_{(4x1)} = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 \\ b_2(1+a_1) & a_2 & 0 & 0 \\ b_2b_3(1+a_1) & b_3(1+a_2) & a_3 & 0 \\ b_2b_3b_4(1+a_1) & b_3b_4(1+a_2) & b_4(1+a_3) & a_4 \end{bmatrix}_{(4x4)} \begin{bmatrix} QSE1_{(j)} \\ QSE2_{(j)} \\ QSE3_{(j)} \\ QSE4_{(j)} \end{bmatrix}_{(4x1)} +$$

$$\begin{bmatrix} b_1 & 0 & 0 & 0 \\ b_1b_2 & b_2 & 0 & 0 \\ b_1b_2b_3 & b_2b_3 & b_3 & 0 \\ b_1b_2b_3b_4 & b_2b_3b_4 & b_3b_4 & b_4 \end{bmatrix}_{(4x1)} \begin{bmatrix} QInic_{(j+1)} + QInic_{(j)} \\ QT1_{(j+1)} + QT1_{(j)} \\ QT2_{(j+1)} + QT2_{(j)} \\ QT3_{(j+1)} + QT3_{(j)} \end{bmatrix}_{(4x1)} \quad [9]$$

El vector columna ($XPiscniv j$) representa el caudal de salida de cada embalse “ $QSE_{(j)}$ ” consecutivo por fila en el instante de tiempo (j) en el modelo de piscina nivelada, ver ecuación [8] y [9].

El vector columna (**UK**) es la entrada impuesta al tránsito de piscina nivelada para el instante de tiempo (**j**) y (**j+1**), representa el caudal de entrada medido en la estación limnigráfica inicial (**Q_{Inic}**) aguas arriba más los caudales cuantificados por las áreas aledañas “**QT**” al cauce principal de la zona de estudio en cada embalse (fila 1 primer embalse, ver **Figura 1**) adicionalmente los caudales de los afluentes tributarios principales y secundarios. Es un vector con igual número de filas como igual número de embalses se plantee, ver ecuación [8] y [9].

Las matrices (**A1** y **B2**) son matrices cuadradas donde están las productoria de los coeficientes adimensionales (**a_i** y **b_i**) que multiplican respectivamente el caudal de salida en el instante (**j**) y los caudales de los afluentes tributarios, así como los caudales por las áreas aledañas al cauce principal “**QT**” en el instante de tiempo (**j**) y (**j+1**), ver ecuación [8] y [9].

Los valores y ecuaciones para calcular los coeficientes adimensionales (**a_i** y **b_i**) son diferentes al modelo de diferencias finitas y de piscina nivelada. Donde específicamente los coeficientes mencionados para el tránsito de piscina nivelada se calculan con las dos siguientes ecuaciones [10] y [11]:

$$a = \frac{2K - \Delta t}{2K + \Delta t} \quad [10]$$

$$b = \frac{\Delta t}{2K + \Delta t} \quad [11]$$

3. METODOLOGÍA Y ZONA DE ESTUDIO

Para el tramo de estudio considerado sobre el río Magdalena se propone un modelo de cuatro (4) sub-tramos (embalses) independientes, teniendo en consideración los ríos tributarios (**Figura 2**). Para cada uno de éstos se representó su área hidrográfica, las áreas aledañas al río que drenan directamente al río Magdalena y los caudales registrados.

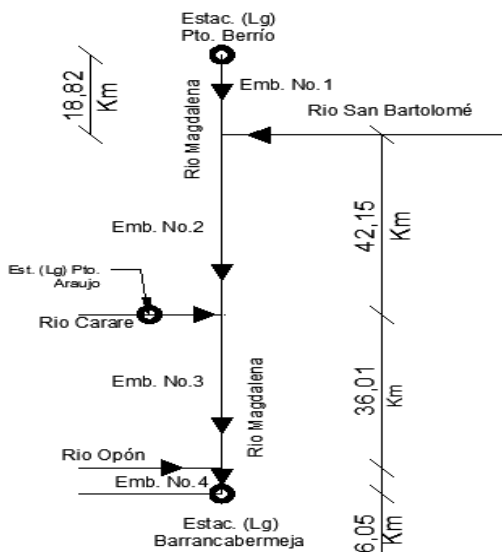


Figura 2.- Modelo topológico del tramo de estudio.

La zona de estudio se encuentra ubicada entre dos estaciones limnigráficas del IDEAM sobre el río Magdalena, desde el municipio de Puerto Berrío en el departamento de Antioquia y hasta el municipio de Barrancabermeja en el departamento de Santander.

Las curvas de calibración y niveles horarios de tres estaciones limnigráficas, son las utilizadas en la zona de estudio. Una de estas estaciones es la estación limnigráfica de Puerto Araujo ubicada en el río Carare único afluente de los tributarios importantes, del cual se obtuvo información adecuada para los Cuatro periodos de tiempos seleccionados, ver **Tabla 1**. La estación de puerto Araujo está localizada entre las estaciones limnigráficas de Puerto Berrío y Barrancabermeja ubicadas relativamente cerca al cauce principal del río Magdalena.

Tabla 1: Características de los embalses escogidos, por área, longitud y pendiente media del cauce.

Embalse	Sub-tramo ó Embalses	Área Sub-tramo ó Embalse (km ²)	Longitud Sub-Tramo (Km)	Pendiente Media (%)
1	Puerto Berrío – Río San Bartolomé	509,448	18,82	0,08
2	Río San Bartolomé – Río Carare	4.898,858	42,15	0,10
3	Río Carare – Río Opón	16.431,151	36,01	0,06
4	Río Opón - Barrancabermeja	4.101,9904	6,05	0,05
	Total	25.941,4493	103,03	

Los periodos seleccionados para análisis de información, calibración y posterior validación, considerando los caudales tributarios del río Carare, en la zona de estudio son los siguientes: Periodo 1: marzo 1 de 2008 a mayo 23 de 2008. Periodo 2: julio 25 de 2008 a septiembre 4 de 2008. Periodo 3: octubre 11 de 2008 a noviembre 15 de 2008. Periodo 4: julio 1 de 2009 a julio 26 de 2009.

Para ubicar los datos atípicos de niveles, se empleó la herramienta gráfica estadística, conocida como Box Plot. Este fue el único análisis que se realizó sobre la consistencia de la información de los niveles horarios utilizados, debido a las tendencias de aumento o descenso de los caudales que se observan claramente en las hidrógrafas. Para completar los pocos datos faltantes, en las series de caudales, se realizó por medio del concepto de regresión lineal múltiple.

Se realizó la función de autocorrelación para cada periodo de simulación a los datos, función que permite establecer en una serie de tiempo, si se presenta estacionalidad o es una serie de tiempo alternante (Chatfield, 1989).

Adicionalmente se aplicó por periodo seleccionado la función de correlación cruzada a los datos, la cual es una relación estadística entre los registros de caudales de los picos y valles en el tiempo en los hidrogramas (Chatfield, 1989). Siendo representado generalmente esta relación estadística para las hidrógrafas como: “el tiempo de tránsito (“tiempo de viaje”) de los caudales, entre dos estaciones limnigráficas, para aquel tiempo transcurrido hasta el primer pico de la función del correlograma”.

Los resultados presentados en la siguiente **Tabla 2**, son importantes para el desarrollo del proyecto, porque se obtiene estadísticamente el tiempo de tránsito o de viaje de los caudales, entre las estaciones de Puerto Berrío y Barrancabermeja, por medio de la función de correlación cruzada. Esto es debido a la dependencia hidrológica inherente de la información hidrométrica, registrada en las dos estaciones limnigráficas de Puerto Berrío y Barrancabermeja, también por su proximidad y que se encuentran sobre el cauce del río Magdalena.

Tabla 2. Resultados de la función de correlación cruzada entre las estaciones limnigráficas de Puerto Berrío y Barrancabermeja, en cuatro periodos seleccionados.

Periodos	Correlograma (Tiempo de tránsito entre estaciones)	Valor Coeficiente de Correlación
1.Ene-1-2008 a Mayo-26-2008	16 horas	0,895
2.Jun-11-2008 a Sept-4-2008	16 horas	0,914
3.Sept-10-2008 a Ene-1- 2009	17 horas	0,811
4. Jul-1-2009 a Jul-26-2009	18 horas	0,863

Los resultados de la **Tabla 2** se puede verificar al observar en las hidrógrafas generalmente cualquier pico de caudal de una creciente, en la estación limnigráfica de Puerto Berrío, se presenta desplazado este pico a unas horas posteriores, aguas abajo en la estación limnigráfica de Barrancabermeja, con mayor caudal.

4. CALIBRACIÓN Y VALIDACIÓN PARA LOS MODELOS DE TRÁNSITO

Se realizó la calibración de los parámetros, apoyado por el programa “Monte-Carlo Analysis Tool” conocido como (MCAT- V2), este programa está en el lenguaje computacional del software Matlab, mediante la función objetivo de Nash-Sutcliffe.

El criterio de la función objetivo de Nash- Sutcliffe, se escogió por su amplia utilización para caudales. Fueron realizadas 2000 simulaciones aleatoriamente en cada uno de los rangos establecidos para los parámetros de los modelos de tránsito propuestos.

La calibración de los modelos se hizo con el (75%) de la serie de caudales y el (25%) de la serie restante se utilizó para validar la calibración, en cada uno de los cuatro períodos seleccionados. En los dos últimos ítems del presente capítulo se presentan los análisis de la calibración y validación de los modelos de tránsito propuestos.

Según la información de la **Tabla 1**, se indican las longitudes aproximadas a lo largo de cada embalse. Con la información de la **Tabla 2** se toma el tiempo de tránsito de 16 horas, resultado estadístico obtenido por la función de correlación cruzada, debido a que se estaría tomando el tiempo de viaje más corto, encontrado en los cuatro periodos seleccionados para la calibración.

Se realizó las calibraciones limitando los valores de los parámetros de (**K**), (ver **Tabla 3**) en el tiempo de tránsito de 16 horas y con base en la longitud de los cuatro embalses, ponderando el tiempo de viaje de cada embalse, para que sumados estos cuatro tiempos den valores cercanos a las 16 horas definidas.

En los modelos de tránsito agregados para el presente proyecto, se encontró una limitante en la información horaria de caudales utilizada para la calibración, porque cuando el tramo o embalse es corto en longitud respecto a la longitud total del cauce analizado, hace que el tiempo de tránsito promedio del embalse sea menor a una hora, no siendo por lo tanto representativo el registro horario de caudales específicamente en esta situación.

Ampliando lo comentado en el párrafo anterior, al tener una longitud total del cauce principal del río Magdalena de 103,03 Km con un tiempo de tránsito de 16 horas proyectado, entre las estaciones limnigráficas de Puerto Berrío y de Barrancabermeja, se estimó un valor promedio de la velocidad en (Km/hora) en el tramo de estudio, obteniéndose 6,456 Km por hora y esto implica que en el cuarto embalse estaría transitándose en un tiempo de 0,937 horas por su longitud de 6,05 Km, ver **Tabla 3**.

Tabla 3: Intervalos del parámetro K, para las simulaciones de calibración y validación de cada embalse.

Embalse	Sub-tramo ó Embalses	Longitud Sub-Tramo (Km)	Tiempo promedio de viaje (Horas)	Rango Mínimo y Máximo de
---------	----------------------	-------------------------	----------------------------------	--------------------------

Mayor Información

				K(horas)
1	Puerto Berrío – Río San Bartolomé	18,82	2,92	(1,5 – 4,5)
2	Río San Bartolomé – Río Carare	42,15	6,55	(5,0 – 8,0)
3	Río Carare – Río Opón	36,01	5,59	(4,5 – 7,0)
4	Río Opón - Barrancabermeja	6,05	0,94	(1,0 – 1,5)
	Total	103,03	16,0	

Uno de los principales inconvenientes para la calibración de los parámetros de los modelos de tránsito desarrollados, es no tener información en estaciones limnigráficas intermedias, entre las estaciones de Puerto Berrío y Barrancabermeja a lo largo del cauce principal. Lo ideal es haber tenido hidrógrafas de estaciones limnigráficas ubicadas aguas abajo del aporte de caudales, de cada uno de los afluentes tributarios principales.

Se distribuyó la diferencia de caudales de la hidrógrafa observada aguas abajo y aguas arriba del cauce principal en la zona de estudio, según la diferencia de tiempo de viaje en 16 horas, por medio de un factor de proporcionalidad de áreas para cada embalse. El cálculo del factor de áreas mencionado se realizó calculando con ponderación las áreas de las subcuencas de cada uno de los afluentes tributarios, también ponderando las áreas aledañas directas al cauce principal, para cada uno de los embalses seleccionados respecto al área total de la cuenca. De esta forma se expone la forma de cómo se estimaron, los caudales de los afluentes tributarios significativos y los caudales por las áreas aledañas al cauce principal, esto es porque no se cuenta con información, esta metodología utilizada es adoptada según (**Bras y Rodríguez-Iturbe, 1993**).

Para el modelo de tránsito de Muskingum planteado se tiene dos parámetros a calibrar (K) y (X). Respecto a este modelo los rangos del parámetro (K) y (x) se les realizaron a ambos parámetros 2000 simulaciones aleatorias. En el proceso de calibración el parámetro (X) está limitado en el intervalo de (0,0 – 0,5), para los cuatro embalses de la zona de estudio.

Análisis de resultados de calibración y validación de los tránsitos

Al revisar los resultados de calibración y validación, el modelo de tránsito de Muskingum presenta la mejor tendencia de ajuste según la función objetivo de Nash-Sutcliffe, para el proceso de calibración y validación en los cuatro periodos seleccionados. El modelo de tránsito de piscina nivelada es el que tiene la segunda mejor tendencia de calibración como de validación y el modelo en menor grado de calibración y validación según la función objetivo es el de tránsito de diferencias finitas, ver **Figura 3**.

Las diferencias de resultados de calibración y validación por medio de la función objetivo de Nash-Sutcliffe de los tres modelos de tránsito (diferencias finitas, piscina nivelada y Muskingum) presentan leves diferencias en los resultados. Los mejores resultados de calibración y validación para el tránsito de Muskingum deben ser, porque tiene dos parámetros a calibrar “K” y “X”, en cambio los otros dos modelos el de tránsito de diferencias finitas y de Piscina Nivelada, tienen un solo parámetro de calibración “K”.

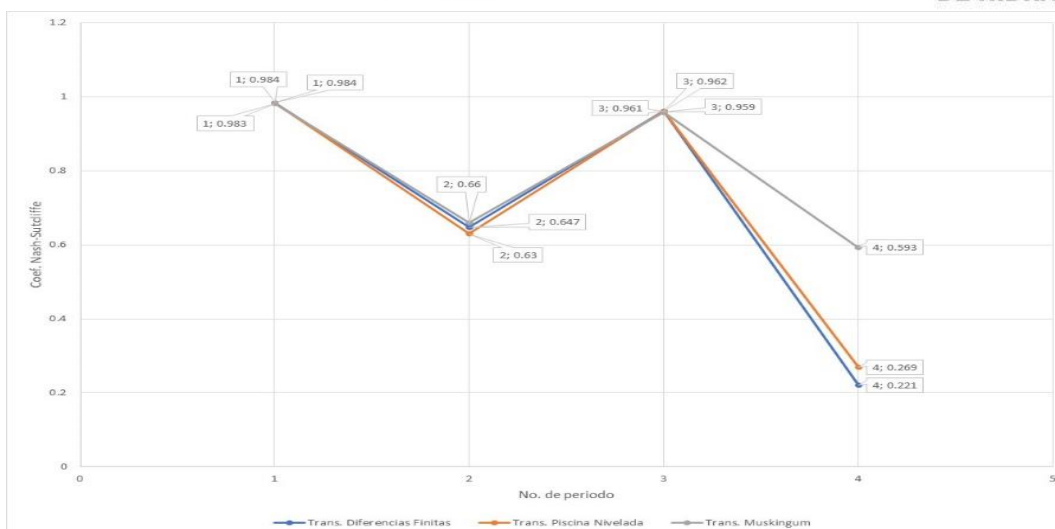


Figura 3.- Resultados de validación de tres modelos de tránsito utilizados, por medio de la función objetivo de Nash-Sutcliffe, en cada uno de los cuatro periodos.

Según literatura técnica sobre el tránsito del modelo de Muskingum, el parámetro calibrado (X), presenta poca sensibilidad en el proceso de calibración de las hidrógrafas (Chow et al, 1994). Al revisar los resultados el parámetro (X) arroja valores disímiles significativos para el mismo embalse, en cada uno de los cuatro periodos seleccionados, confirmando la baja sensibilidad o efecto en el proceso de calibración. Caso que no sucede con el parámetro de calibración de “K” que presenta mejor sensibilidad, para los tres modelos de tránsito implementados.

En los resultados de calibración y de validación se presentaron similitudes de la hidrógrafa de salida del cuarto y último embalse, respecto a la hidrógrafa medida en la estación limnigráfica de Barrancabermeja, con los modelos de tránsitos de diferencias finitas y de piscina nivelada en los cuatro periodos seleccionados. Estos resultados similares deben ser por la estructura matemática que tienen ambos modelos de tránsito.

Específicamente los resultados de validación, respecto a los valores de la función objetivo de Nash son bajos (<0.90) para el periodo 2 y periodo 4 en los tres modelos de tránsito aplicados, no se encontró explicación de estos resultados.

Los modelos de tránsito calibrados de diferencias finitas, piscina nivelada y de Muskingum, tienden a conservar el tiempo de viaje calculado en la función de correlación cruzada (ver Tabla 3). Sin embargo, el modelo de Muskingum presenta un ligero mejor ajuste para cuando se compara con el valor de la sumatorias del parámetro (K), de la función de correlación cruzada. Adicionalmente los valores presentados en la Tabla 3, se encontró para los cuatro periodos seleccionados para la calibración y validación, los periodos 1, 2 son los de mejor ajuste, en cuanto al tiempo de tránsito de la sumatoria del parámetro “K” y de la función de la correlación cruzada. El modelo de tránsito de Muskingum y el modelo de tránsito de Piscina Nivelada, son los de mejor acercamiento al tiempo de viaje hallado por la función de correlación cruzada.

Es importante resaltar que solo se presentó gráficamente los valores del coeficiente de Nash-Sutcliffe en la serie de tiempo del 25% para cada uno de los cuatro periodos de tiempo seleccionados y se mencionó los resultados de calibración del parámetro de “K”. Sin embargo, se indica que se realizó otros análisis estadísticos típicos como son los errores promedios de caudales en la calibración y validación de la hidrógrafa medida en la estación Barrancabermeja VS Hidrógrafa calibrada y validada para el cuarto y último embalse. De igual forma los promedios de las varianzas de error en la calibración y validación.

Mayor Información

5. MODELACIÓN: PRONÓSTICO CON FILTRO KALMAN (KF)

El filtro KF se implementó en el pronóstico de caudales horarios, por medio de las ecuaciones de estado indispensable para el filtro, ecuaciones generadas por los tres modelos lineales de tránsito de caudales desarrollados para el proyecto.

Para la aplicación del Filtro de Kalman (Kalman, R.E. 1960), se plantearon dos escenarios de simulación, siendo para el primer escenario asumir los ruidos o errores en la ecuación de medición de la información. El segundo escenario es suponer que no hay errores en la medición de los niveles.

Se considera necesario implementar un modelo autoregresivo de primer orden, en la aplicación del Filtro de Kalman, para pronosticar los caudales de los afluentes tributarios, en cada modelo de tránsito. Esto es debido porque en la ecuación de estado matricial del filtro KF, existe un vector columna (U_k) de entradas directas al modelo, que representa los caudales de aporte de los afluentes tributarios, donde algunos caudales están adelantados en el instante de tiempo ($k+1$).

Como se puede observar en las ecuaciones [6], [7] y [8], está el vector columna (U) el cual representa dos entradas al modelo que se consideraron. La primera entrada al modelo son los caudales de los afluentes tributarios, la segunda entrada adicional es el caudal de aporte por el posible drenaje de las áreas aledañas al cauce del río Magdalena, indicando que se hace necesario pronosticar estas dos entradas de caudal de los tributarios porque no se conoce el próximo dato.

Es importante resaltar que según el modelo puede haber dos tipos de vector columna de entrada (U), uno en el instante de tiempo (t) y el otro vector en el instante de tiempo ($t+1$), (ver las ecuaciones [6], [7] y [8]), siendo este último vector el que se pronostica con el modelo autoregresivo de orden uno. Se pronostica en una primera instancia las entradas de los caudales de los tributarios, para conservar la estructura de los modelos de tránsito, sin aplicar el Filtro de Kalman.

La variable que se pronostica con el filtro Kalman específicamente es el caudal de salida ($QSE1_{(t+1)}$, $QSE2_{(t+1)}$, $QSE3_{(t+1)}$, $QSE4_{(t+1)}$) de cada uno de los cuatro embalses del tramo de estudio. Esta variable de caudal de salida de los embales está representada por el vector columna (X_{t+1}) en la ecuación [6] para el modelo de tránsito de diferencias finitas, el vector columna ($X_{musk_{j+1}}$) en la ecuación [7] en el modelo de tránsito de Muskingum y el vector columna ($X_{Piscniv_{j+1}}$) en la ecuación [8] del modelo de piscina nivelada.

Tabla 4. Ecuaciones del sistema (modelo del tránsito) y la ecuación de medición para un Filtro Kalman-Bucy Unidimensional Discretizado.

Ecuaciones del Filtro de Kalman Discreto en el tiempo para predicción	Ecuación
$[X_{k+1}]_{nx1} = A_{n \times n} * [X_k]_{nx1} + B_{n \times n} * [U_k]_{nx1} + [V_k]_{nx1}$	12
$Y_k = C_{n \times n} * [X_k]_{nx1} + [W_k]_{nxn}$	13

Las cinco ecuaciones presentadas en la **Tabla 4** y **Tabla 5** son las más importantes para aplicar el filtro de Kalman lineal unidimensional discretizado.

Tabla 5. Ecuaciones de Corrección (Ecuaciones de actualización en la medición), para un Filtro Kalman Unidimensional Discretizado.

Ecuaciones del Filtro de Kalman Discreto en la actualización de la medición	Ecuación
$K_k = AP_k C^T [R_k + CP_k C^T]^{-1}$	14
$X'_{k+1} = A\hat{X}_k + BU_k + K_k(Y_k - \hat{Y}_k)$	15
$P_{k+1} = [A - K_k C]P_k A^T + Q_k$	16

Mayor Información

Las dos matrices (**A**) y (**B**) son matrices de constantes, conocida como la matriz de transición (**A**) y la matriz de entrada impuesta el sistema (**B**), ambas de tamaño $(n \times n)$, ver ecuación [12]. El vector de estado del sistema físico (\mathbf{X}_k) es el que se quiere modelar, en donde generalmente se asocia también al estado no accesible del sistema, de n filas y una sola columna. Representa el caudal de entrada al inicio del tramo y los caudales de salida de cada uno de los embalses, para el proyecto. Es un vector columna (\mathbf{U}_k), la variable de entrada impuesta al sistema o variable exógena, representando los caudales de los tributarios en el tramo de estudio.

El vector columna (\mathbf{V}_k) representa el proceso estocástico asociado a un ruido gaussiano, en la ecuación de estado del sistema [14], de media cero y con matriz de covarianza (**Q**). La matriz (**C**) representa la ecuación de medición y es asumida como una matriz de identidad generalmente. El vector columna (\mathbf{Y}_k) es el estado de la medición, siendo el vector los caudales registrados, específicamente en la estación limnigráfica de Barrancabermeja, ver ecuación [14].

La ecuación de estado o la ecuación del sistema como se conoce ver ecuación [12], en la implementación de la estructura del Filtro de Kalman, tiene similitudes con la estructura matricial en las ecuaciones [6], [7] y [8] de los modelos de tránsitos propuestos. Debido a que las tres últimas ecuaciones matriciales mencionadas tienen caudales de aportes tributarios adelantada en el tiempo $(t+1)$ en el vector columna (**U**), hacia muy engorroso el pronóstico de estos caudales utilizando también el filtro Kalman, por eso se utilizó un modelo autoregresivo de orden uno.

Realizando un análisis para formular el filtro Kalman en el pronóstico de caudal de los tributarios, es necesario conocer o plantear en la estructura matemática, la ecuación [13] conocida como la ecuación de medición, acoplando la anterior ecuación con la ecuación de estado [12]. Para realizar este acople es necesario conocer al menos dos hidrógrafas en los afluentes tributarios de importancia con resolución de caudales horarios para el proyecto, información que no se tiene.

En la ecuación [14] se calcula (\mathbf{K}_k), es una matriz conocida como la ganancia de Kalman. La esencia del vector de ganancia del Filtro de Kalman (\mathbf{K}_k), representa el mínimo valor de la matriz de covarianzas (Welch y Bishop, 2006), o de varianzas del error $P_{(k+1)}$. Los valores iniciales para iniciar el algoritmo son la variable de estado estimada inicial $\hat{X}_{(k)}$ y la matriz de Varianza inicial $P_{(k)}$ ecuación [14] y [16], para el pronóstico basado en los modelos de tránsito.

Las ecuaciones en el siguiente orden [15], [14] y [16], se deben aplicar para el algoritmo del Filtro de Kalman para el pronóstico, apoyado con la ecuación [12] de medición.

Acople de los modelos en el filtro Kalman

La forma en que fueron acopladas las ecuaciones del Filtro de Kalman en los modelos de tránsito planteados, es esencialmente por los ruidos en la medición de la ecuación de estado y de la ecuación de medición, los cuales son muy sensibles en el pronóstico. Según ecuación [13] el vector columna de medición (\mathbf{X}_k), están los caudales de salida medidos de los tres primeros embalses representados en las tres primeras filas del vector, de los cuales no se tiene medición de niveles ni hidrógrafas reales. La cuarta y última fila representa el nivel medido en la estación limnigráfica de Barrancabermeja, por lo tanto, únicamente se tienen los caudales de salida del cuarto y último embalse en la zona de estudio.

Con base en el anterior párrafo se plantea dos situaciones de simulación, considerando o no errores en la ecuación [13] de medición. Esto quiere decir que la matriz de varianza del error en la medición (**R**) es cero si se considera que no hay error en la medición o plantear que si hay algún tipo de error.

Para iniciar el algoritmo, es por la variable de estado estimada inicial $\hat{X}_{(k)}$ y la matriz de covarianza inicial $P_{(k)}$. El ruido asociado a la ecuación de estado está en la matriz de varianza **Q**, la cual se empieza

a generar después de la primera iteración, considerando el dato inicial de caudal, ya empieza a tener errores del pronóstico. Sin embargo, como se inició el pronóstico del filtro Kalman, a partir del 50% de datos en la serie de tiempo, la matriz Q ya inicia con la varianza del error que tenía de la ecuación de estado, por el dato anterior de inicio que traía del modelo de calibración del tránsito.

Respecto a la matriz del ruido en la ecuación de medición R, se tomó con el error de la medición que tenía anterior del modelo de calibración del tránsito, para el valor inicial y se inició el pronóstico después con el 50% de la información restante, con ese valor inicial mencionado. Para el segundo caso de la simulación del filtro Kalman, considera no tener errores de los niveles registrados en la estación limnigráfica, en la ecuación de medición, por lo tanto, la matriz R se tomó siempre en el pronóstico con valor de cero.

Con base en el anterior párrafo se plantea dos situaciones de simulación, considerando o no errores en la ecuación [13] de medición. Esto quiere decir que la matriz de varianza del error en la medición (R) es cero si se considera que no hay error en la medición o plantear que si hay algún tipo de error. Para el caso de la simulación cuando se considera errores en la medición, se planteó errores en las medidas de los niveles (ecuación de medición [13]), propagando una variación aleatoria de cinco centímetros por encima o por debajo de los niveles registrados en la información suministrada por el IDEAM. De esta forma se indujo un error en la medición, siendo el error la diferencia de los caudales obtenidos con los niveles registrados y los caudales alterados por la variación de los niveles comentados.

Pronóstico del filtro Kalman con base en los tres modelos de tránsito y análisis de resultados

A continuación, se presenta gráficamente resultados del pronóstico del filtro Kalman del periodo 4, basados en el modelo de tránsito de piscina nivelada considerando ruido en la ecuación de medición, ver **Figura 4** y **Figura 5**.

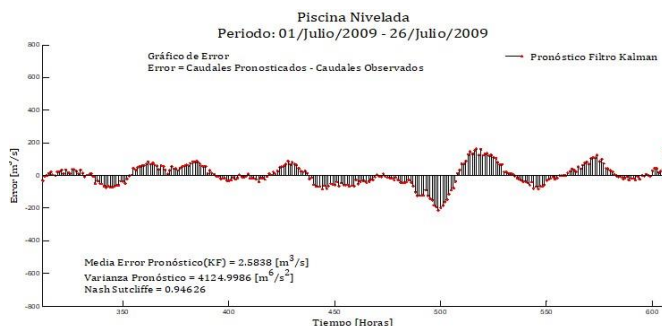


Figura 4.: Resultados estadísticos de errores del pronóstico KF en la hidrógrafa, en el modelo de piscina nivelada periodo 4, con ruido en la medición.

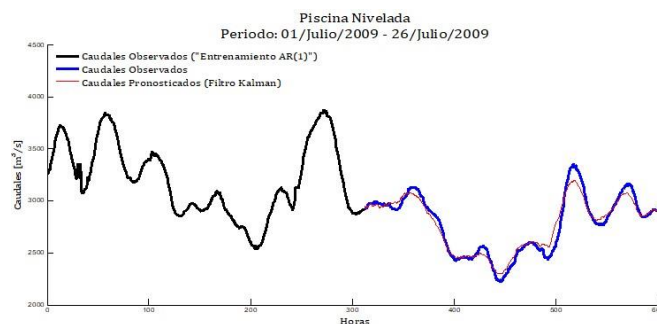


Figura 5.: Pronóstico de la hidrógrafa en la Estación limnigráfica de Barrancabermeja, periodo 4, con ruidos en la medición. La hidrógrafa a la salida del cuarto embalse.

También, se presenta gráficamente resultados del pronóstico del filtro Kalman del periodo 4, basados en el modelo de tránsito de Muskingum sin ruido en la ecuación de medición, ver **Figura 6** y **Figura 7**.

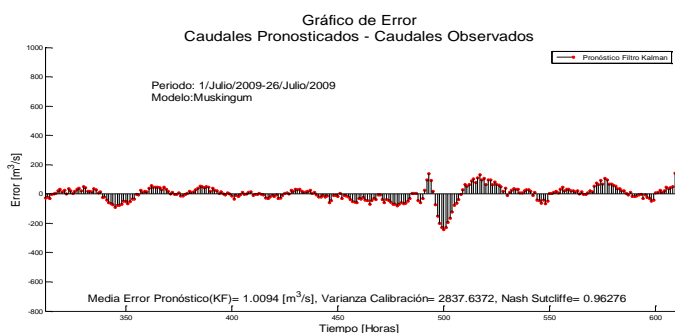


Figura 6.: Resultados estadísticos de errores del pronóstico KF en la hidrógrafa, en el modelo de piscina nivelada periodo 4, sin ruido en la medición.

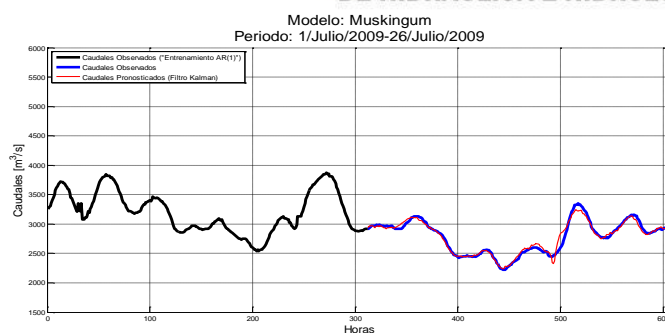


Figura 7: Pronóstico de la hidrógrafa en la Estación limnigráfica de Barrancabermeja, periodo 4, sin ruidos en la medición. La hidrógrafa a la salida del cuarto embalse.

Son muy significativo los resultados de los coeficientes o función objetivo de Nash-Sutcliffe para el pronóstico de caudales por el filtro de Kalman en cada uno de los cuatro periodos y los tres modelos de tránsito desarrollados con o sin ruido en la ecuación de medición del filtro. Por ejemplo, en la serie del 50% utilizado por periodo para pronosticar, se encontró que la función objetivo esta alrededor de 0.94626 a 0.99525 considerando ruido en la ecuación de medición, en contra parte el rango de resultados de la función objetivo es de 0.96276 y 0.99559 sin ruido en la ecuación de medición.

El modelo de tránsito por diferencias finitas presenta la tendencia de los mejores y más altos valores cercanos a uno, en el coeficiente de Nash-Sutcliffe para los resultados del pronóstico con el filtro Kalman, con base en el tránsito de piscina nivelada la segunda mejor tendencia y el tránsito de Muskingum la tendencia de los valores menores de este coeficiente. Es importante indicar que las diferencias de los resultados del coeficiente son poco significativas entre los tres modelos de tránsito propuestos.

Se menciona otro análisis realizado a los resultados de los pronósticos con el filtro Kalman, basados en el promedio del error de caudales pronosticados por periodo, encontrándose que el modelo de tránsito por diferencias finitas presenta los menores valores de promedios de errores de caudales pronosticados de forma general, en los cuatro periodos simulados y al respecto de los tres modelos de tránsito. Adicionalmente por el orden de magnitud de los caudales en las hidrógrafas, con valores hasta más de 7000 m³/s, encontrar que los promedios del error del caudal pronosticado tienen valores en el rango de (-10,76 m³/s) en valor absoluto o de 3,81 m³/s, son realmente resultados bajos, indicado que el pronóstico con el filtro Kalman es eficiente.

También se indica o menciona los resultados de la varianza del error del pronóstico de caudales horarios por el filtro de Kalman en cada uno de los cuatro periodos y los tres modelos de tránsito desarrollados con o sin ruido en la ecuación de medición del filtro. El modelo de tránsito por diferencias finitas presenta la tendencia de los más bajos y mejores valores de la varianza en el error de caudales del pronóstico y el tránsito de Muskingum presenta la tendencia de los valores mayores de la varianza. No se presentan las gráficas y resultados específicamente de todos los resultados por los cuatro periodos y los tres modelos.

6. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

La modelación realizada consistió en implementar tres modelos lineales de tránsito de crecientes, considerando ríos tributarios significativos que es poco usual, así como las áreas aferentes que aportan directamente al río principal. Estos modelos sirvieron de base en la implementación del filtro Kalman para generar la ecuación de estado [12], ya que representan el comportamiento físico del sistema de una forma adecuada y permiten, forjar el pronóstico de las “entradas” y “salidas”, en cada uno de los cuatro embalses o subtramos, que sectorizaron el tramo de estudio sobre el río Magdalena.

Mayor Información

Para encontrar cuál de los tres modelos de tránsito lineales desarrollados, es el que mejor calibre y válido en el proceso, basados en los resultados de los cuatro periodos seleccionados, se escogieron tres criterios: los mejores valores de la función objetivo de Nash-Sutcliffe, el menor valor de promedio o media de los errores de caudales y la sumatoria del parámetro “**K**” de cada embalse respecto a la función de autocorrelación. Por los argumentos anteriores se escoge el modelo de Muskingum, como el modelo de mejor calibración por tener los mejores resultados de la función objetivo de Nash, esto debe ser porque son dos parámetros para calibrar que tiene este tránsito, el cual es el parámetro “**K**” y el parámetro “**X**”.

El parámetro (**k**) en los diferentes modelos planteados representa físicamente el tiempo de viaje de la onda y la calibración de este parámetro tenía que realizarse de manera que se aproximara a la realidad física. En algunos casos la calibración de este parámetro para cada uno de los embalses o tramos de estudio considerados resultó ser bastante sensible ya que se obtuvieron diferentes combinaciones “válidas”. En vista de ello y teniendo en cuenta la parsimonia de los modelos de piscina nivelada y diferencias finitas, ya que solamente se presenta un parámetro en el modelo físico se hizo necesario continuar con el proceso de modelación con todos los modelos y no restringir el proceso de pronóstico solamente al que mejor calibre.

Es importante mencionar que, para el pronóstico de caudales, existen modelos más elaborados (Moreno y Salazar, 2008) y con mayor número de variables, sin embargo, los modelos desarrollados en este trabajo, a pesar de su sencillez presentan resultados muy buenos en todas las fases del proceso de modelación, lo cual es muy conveniente para el tipo de información que contamos en nuestro medio. Adicionalmente un producto del trabajo es que, con modelos sencillos y prácticos, con información hidrométrica básica se logra implementar el filtro de Kalman para el pronóstico de caudales entre estaciones limnigráficas a nivel nacional.

Los resultados de la función objetivo coeficiente de Nash-Sutcliffe en el proceso de calibración y validación de los tránsitos, el que presenta la mejor tendencia de este coeficiente es para el modelo de tránsito de Muskingum, el modelo de tránsito de diferencias finitas es el que tiene los resultados más bajos de este coeficiente. Al revisar los resultados del pronóstico del filtro Kalman, se encuentra que, en los pronósticos, mejora los resultados del coeficiente de Nash-Sutcliffe para el modelo de diferencias finitas y en cambio el modelo de Muskingum estos valores del coeficiente disminuyen.

Los valores de la función objetivo de Nash de los pronósticos (con y sin ruido en la medición), se puede concluir que el grado de implementación del filtro Kalman para el pronóstico de caudales, para un tramo del río Magdalena es buena, debido que los valores de la función objetivo están en el rango de 0,946 (94,6%) y 0,995 (99,5%), cuando el valor ideal es 1 (100%). En parte estos resultados del pronóstico del filtro, es por la representación física en el tramo de estudio que genera, los modelos de tránsito desarrollados y por la resolución temporal horaria de caudales suministrada por el IDEAM.

El potencial para futuras investigaciones en la implementación del filtro Kalman para sistemas no lineales (EKF) y (UKF) en pronósticos de caudales, se puede extender a modelos matemáticos no lineales que representen el comportamiento físico del sistema en cuanto al movimiento o volumen de almacenamiento (S) del agua en el río, por ejemplo, basados en el tránsito de Muskingum no lineal. Otra aplicación futura de investigación para próximos trabajos es hacer pronósticos de caudales horarios con el filtro Kalman, considerando el ruido por la matriz (R) de una forma completa y conocer si mejora los resultados sustancialmente en los pronósticos, tanto para modelos físicos lineales o no lineales. Siempre y cuando se tenga la información de hidrógrafas, de las estaciones limnigráficas intermedias en el tramo de estudio, adicionalmente que estén ubicadas las estaciones, idealmente o preferiblemente al terminar cada subtramo o después de un afluente tributario de importancia.



7. REFERENCIAS

Bras Rafael L. and Rodríguez - Iturbe Ignacio, (1993). Random functions and Hydrology. Dover Publications, Inc.

Moreno Cadavid Julián y Enrique Salazar, José 2008. Generación de series sintéticas de caudales usando un modelo Matalas con medias condicionadas. Artículo presentado en la revista Avances en Recursos Hidráulicos, núm.17, mayo, 2008, pp. 17-24.

Chatfield Christopher 1989, The Analysis of time series an introduction, Chapman & Hall, Fourth edition, Scholl of mathematical sciences university of Bath.

Chow, Ven Te; Maidment, David y Mays, Larry. Hidrología aplicada. Bogotá: Mc-Graw Hill. 1994. 584 p.

Imperial College of Science Technology and Medicine. User manual Monte-Carlo Analysis Tool (MCAT-V2.0). London, 2000. 25 p.

Kalman, R.E.,(1960). A New Approach to Linear Filtering and Predictions Problems, Research Institute for Advanced Study, Baltimore Md. Journal of Basic Engineering, 82 (series D): P. 35-45 ASME.

KALMAN, R y R. BUCY. New Results in Linear Filtering and Prediction Theory. Journal of Basic Engineering. March, 1961.

Konstantine P. Georgakakos and Rafael L. Bras, (June 1982). Real-Time, Statistically Linearized, Adaptive Flood Routing. Paper of Water Resources Research, Vol. 18, 3, Pages 513 – 524.

Ponce Víctor Miguel, 1989. Engineering Hydrology Principles and Practices, Prentice-Hall, Inc. San Diego State University, California E.E.U.U. 628 p.

Mayor Información